



ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ - ΜΕΤΡΟΥ

Πρόσημο

Μέτρο



0	1	0	0	1	0	1	1 ₂
---	---	---	---	---	---	---	----------------

= +75₁₀

1	1	0	0	1	0	1	1 ₂
---	---	---	---	---	---	---	----------------

= -75₁₀

Δεν χρησιμοποιείται σε υπολογιστικά συστήματα!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!



ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ - ΜΕΤΡΟΥ

(κλίμακα τιμών για 8 bits)

0 | 1 1 1 1 1 1 1₂

= +127₁₀

0 | 0 0 0 0 0 0 0₂

= +0₁₀

1 | 0 0 0 0 0 0 0₂

= -0₁₀

1 | 1 1 1 1 1 1 1₂

= -127₁₀

Bits	Unsigned value	Signed Magnitude value
0111 1111	127	127
0111 1110	126	126
0000 0010	2	2
0000 0001	1	1
0000 0000	0	0
1000 0000	128	-0
1000 0001	129	-1
1000 0010	130	-2
1111 1110		-126
1111 1111	255	-127

Δεν χρησιμοποιείται σε υπολογιστικά συστήματα!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αφαίρεση Δυαδικών Αριθμών

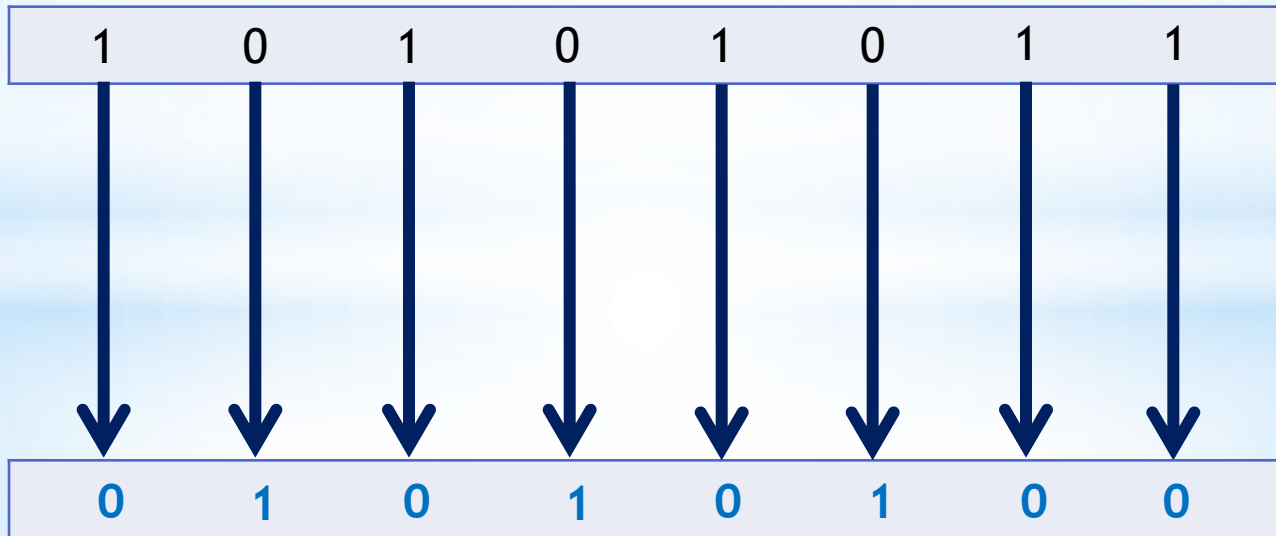
- Η αφαίρεση των δυαδικών αριθμών μετατρέπεται εσωτερικά στον Η/Υ σε πρόσθεση. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας το συμπλήρωμα του αριθμού που αφαιρείται.
- Στο άθροισμα χρειάζεται να γίνουν και πιθανές διορθώσεις.
 - Συμπλήρωμα ως προς 1: κυκλική επαναφορά κρατούμενου (το πιθανό κρατούμενο προστίθεται στο LSB του αποτελέσματος).
 - Συμπλήρωμα ως προς 2: απόρριψη του κρατούμενου.
- Αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός δεν υπάρχει κρατούμενο. Τότε παίρνουμε το αντίστοιχο συμπλήρωμα του αποτελέσματος και βάζουμε ένα πρόσημο (-) μπροστά.



ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ 1

Ευρεση συμπληρώματος ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού





ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ 1

(κλίμακα τιμών για 8 bits)

0 | 1 1 1 1 1 1 1 ₂

$$= +127_{10}$$

0 | 0 0 0 0 0 0 0 ₂

$$= +0_{10}$$

1 | 1 1 1 1 1 1 1 ₂

$$= -0_{10}$$

1 | 0 0 0 0 0 0 0 ₂

$$= -127_{10}$$

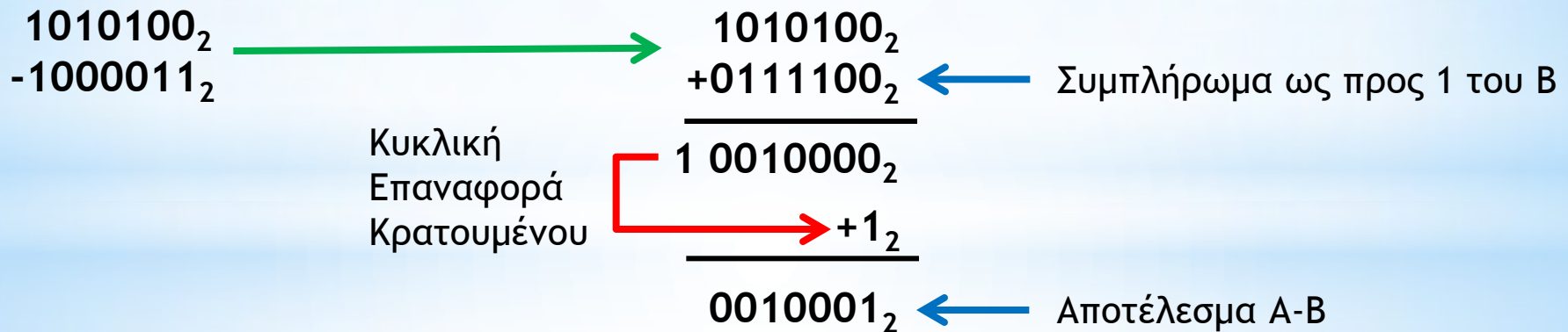
Bits	Unsigned value	1's complement value
0111 1111	127	127
0111 1110	126	126
0000 0010	2	2
0000 0001	1	1
0000 0000	0	0
1111 1111	255	-0
1111 1110	254	-1
1000 0010	130	-125
1000 0001	129	-126
1000 0000	128	-127

Χρησιμοποιείται σπάνια σε υπολογιστικά συστήματα.

* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αφαίρεση Δυαδικών Αριθμών με χρήση Συμπληρώματος ως προς 1 (1/2)

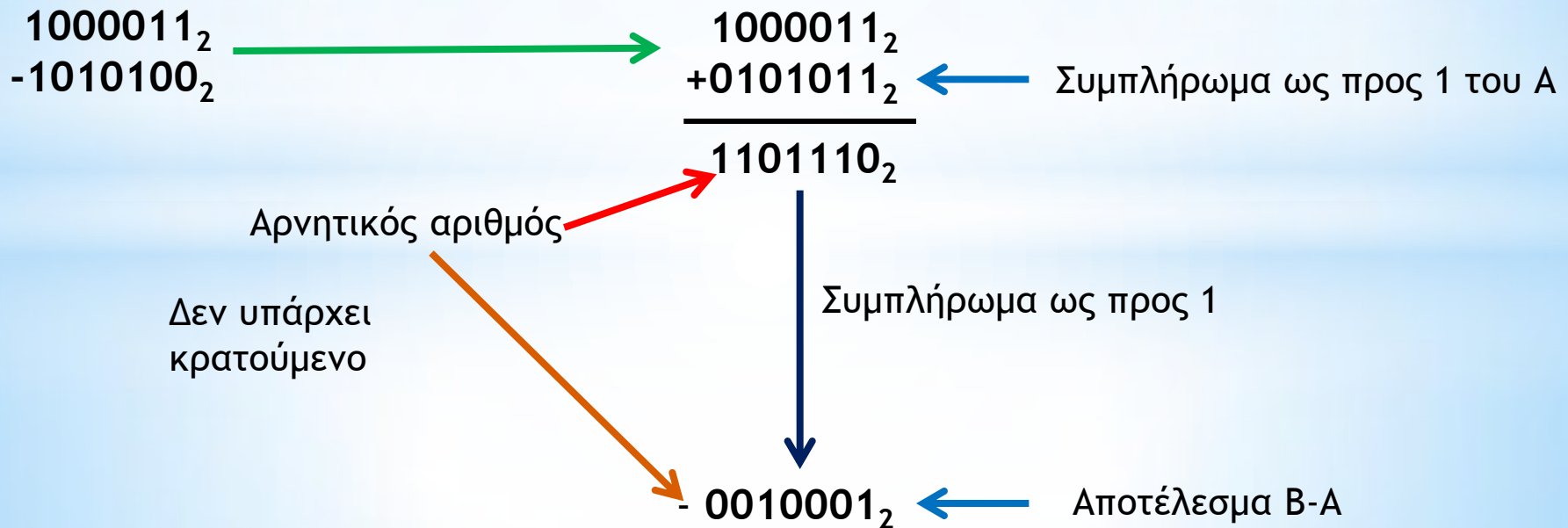
- Έστω ότι πρέπει να εκτελέσουμε την αφαίρεση A-B όπου $A=1010100_2$ και $B=1000011_2$. $A > B$, το αποτέλεσμα είναι θετικό.



* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αφαίρεση Δυαδικών Αριθμών με χρήση Συμπληρώματος ως προς 1 (2/2)

- Έστω ότι πρέπει να εκτελέσουμε την αφαίρεση $B-A$ όπου $B=1000011_2$ και $A=1010100_2$. $B < A$, το αποτέλεσμα είναι αρνητικό.





ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Παραδείγματα Αφαίρεσης Δυαδικών Αριθμών με χρήση Συμπληρώματος ως προς 1 (1/2)

$$\begin{array}{r}
 5_{10} \quad 0101_2 \\
 -4_{10} \quad -0100_2 \\
 \hline
 0101_2 \quad 5_{10} \\
 +1011_2 \quad +(-4_{10}) \\
 \hline
 1\ 0000_2 \\
 \text{Κυκλική Επαναφορά Κρατουμένου} \rightarrow +1_2 \\
 \hline
 0001_2 \quad 1_{10}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -5_{10} \quad 1010_2 \\
 -(-2_{10}) \quad -1101_2 \\
 \hline
 1010_2 \quad -5_{10} \\
 +0010_2 \quad +2_{10} \\
 \hline
 1100_2 \quad -3_{10} \\
 \text{Αρνητικός αριθμός} \rightarrow \\
 \downarrow \\
 -0011_2 \quad -(+3_{10})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -3_{10} \quad 1100_2 \\
 -(-4_{10}) \quad -1011_2 \\
 \hline
 1100_2 \quad -3_{10} \\
 +0100_2 \quad +4_{10} \\
 \hline
 1\ 0000_2 \\
 \text{Κυκλική Επαναφορά Κρατουμένου} \rightarrow +1_2 \\
 \hline
 0001_2 \quad 1_{10}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -4_{10} \quad 1011_2 \\
 -3_{10} \quad -0011_2 \\
 \hline
 1011_2 \quad -4_{10} \\
 +1100_2 \quad +(-3_{10}) \\
 \hline
 1\ 0111_2 \\
 \text{Κυκλική Επαναφορά Κρατουμένου} \rightarrow +1_2 \\
 \hline
 1000_2 \quad -7_{10} \\
 \text{Αρνητικός αριθμός} \rightarrow \\
 \downarrow \\
 -0111_2 \quad -(+7_{10})
 \end{array}$$



ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Παραδείγματα Αφαίρεσης Δυαδικών Αριθμών με χρήση Συμπληρώματος ως προς 1 (2/2)

$$\begin{array}{r}
 3_{10} \quad 0011_2 \\
 -4_{10} \quad -0100_2 \\
 \hline
 0011_2 \quad 3_{10} \\
 +1011_2 \quad +(-4_{10}) \\
 \hline
 1110_2 \quad -1_{10}
 \end{array}$$

Αρνητικός αριθμός

$$\begin{array}{r}
 1110_2 \quad -1_{10} \\
 \downarrow \\
 -0001_2 \quad -(+1_{10})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5_{10} \quad 0101_2 \\
 -(-2_{10}) \quad -1101_2 \\
 \hline
 0101_2 \quad 5_{10} \\
 +0010_2 \quad +2_{10} \\
 \hline
 0111_2 \quad 7_{10}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -4_{10} \quad 1011_2 \\
 -4_{10} \quad -0100_2 \\
 \hline
 1011_2 \quad -4_{10} \\
 +1011_2 \quad +(-4_{10}) \\
 \hline
 1 \ 0100_2
 \end{array}$$

Κυκλική Επαναφορά Κρατουμένου

$$\begin{array}{r}
 1 \ 0100_2 \\
 \rightarrow +1_2 \\
 \hline
 0101_2 \quad +5_{10}
 \end{array}$$

Υπερχειλίση!! Το -8_{10} δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με 4bits.

$$\begin{array}{r}
 5_{10} \quad 0101_2 \\
 -(-4_{10}) \quad -1011_2 \\
 \hline
 0101_2 \quad 5_{10} \\
 +0100_2 \quad +4_{10} \\
 \hline
 1001_2 \quad -6_{10}
 \end{array}$$

Αρνητικός αριθμός

$$\begin{array}{r}
 1001_2 \quad -6_{10} \\
 \downarrow \\
 -0110_2 \quad -(+6_{10})
 \end{array}$$

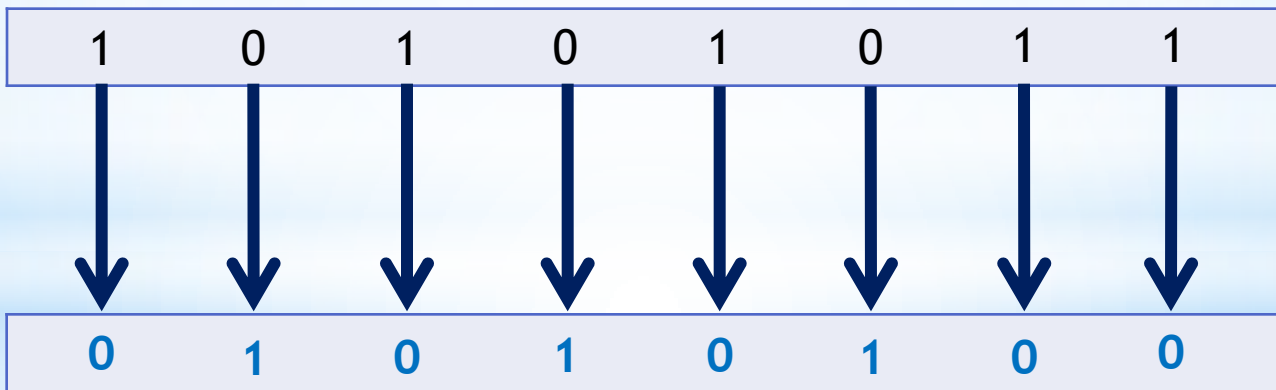
Υπερχειλίση!! Το $+9_{10}$ δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με 4bits.



ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ 2

Ευρεση συμπληρώματος ως προς 2 ενός δυαδικού αριθμού



Συμπλήρωμα
ως προς 1

Πρόσθεση 1 στο LSB





ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ 2

(κλίμακα τιμών για 8 bits)

0 | 1 1 1 1 1 1 1 1₂

$$= +127_{10}$$

0 | 0 0 0 0 0 0 0 0₂

$$= 0_{10}$$

1 | 1 1 1 1 1 1 1 1₂

$$= -1_{10}$$

1 | 0 0 0 0 0 0 0 0₂

$$= -128_{10}$$

Bits	Unsigned value	2's complement value
0111 1111	127	127
0111 1110	126	126
0000 0010	2	2
0000 0001	1	1
0000 0000	0	0
1111 1111	255	-1
1111 1110	254	-2
1000 0010	130	-126
1000 0001	129	-127
1000 0000	128	-128

Χρησιμοποιείται ευρέως σε υπολογιστικά συστήματα.

* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αφαίρεση Δυαδικών Αριθμών με χρήση Συμπληρώματος ως προς 2 (1)

- Έστω ότι πρέπει να εκτελέσουμε την αφαίρεση $A-B$ όπου $A=1010100_2$ και $B=1000011_2$. $A > B$, το αποτέλεσμα είναι θετικό.

$$\begin{array}{r} 1010100_2 \\ -1000011_2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Απόρριψη Κρατουμένου}} \begin{array}{r} 1010100_2 \\ +0111101_2 \\ \hline 1\ 0010001_2 \\ \hline \\ \hline 0010001_2 \end{array}$$

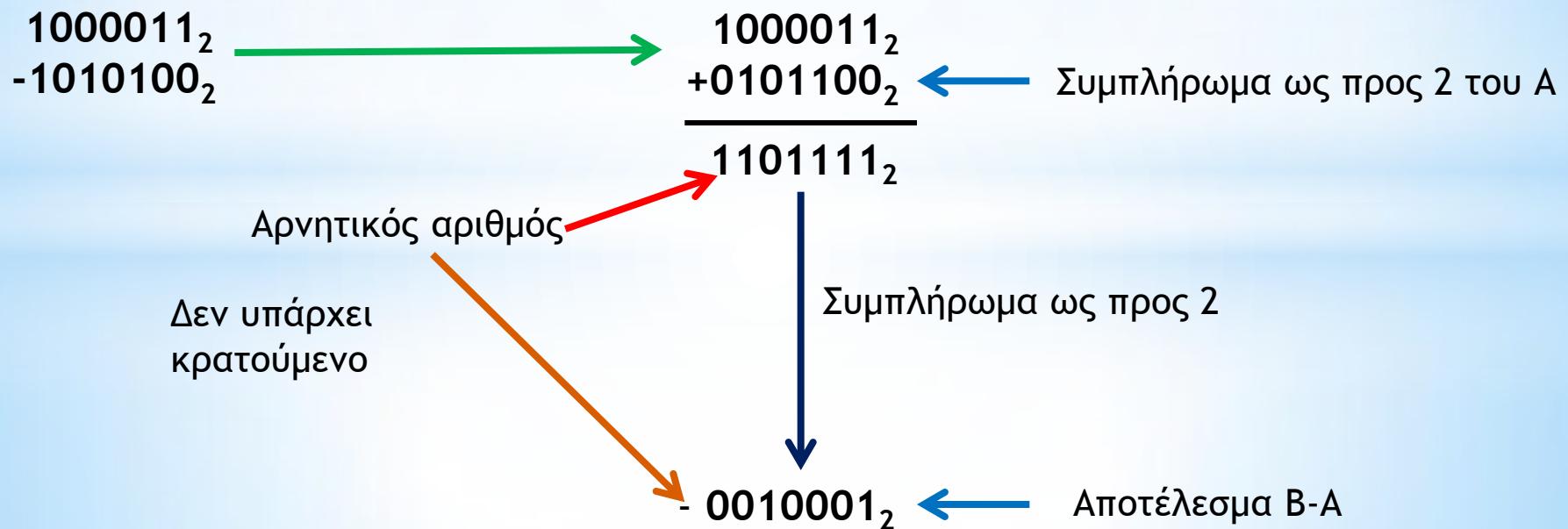
← Συμπλήρωμα ως προς 2 του B

← Αποτέλεσμα A-B

* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αφαίρεση Δυαδικών Αριθμών με χρήση Συμπληρώματος ως προς 2 (2)

- Έστω ότι πρέπει να εκτελέσουμε την αφαίρεση $B-A$ όπου $B=1000011_2$ και $A=1010100_2$. $B < A$, το αποτέλεσμα είναι αρνητικό.





ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Παραδείγματα Αφαίρεσης Δυαδικών Αριθμών με χρήση Συμπληρώματος ως προς 2 (1/2)

$$\begin{array}{r}
 5_{10} \quad 0101_2 \quad \rightarrow \quad 0101_2 \quad 5_{10} \\
 -4_{10} \quad -0100_2 \quad \rightarrow \quad +1100_2 \quad +(-4_{10}) \\
 \hline
 1 \quad 0001_2 \\
 \downarrow \\
 0001_2 \quad 1_{10}
 \end{array}$$

Απόρριψη Κρατουμένου

$$\begin{array}{r}
 -5_{10} \quad 1011_2 \quad \rightarrow \quad 1011_2 \quad -5_{10} \\
 -(-2_{10}) \quad -1110_2 \quad \rightarrow \quad +0010_2 \quad +2_{10} \\
 \hline
 1101_2 \quad -3_{10} \\
 \downarrow \\
 -0011_2 \quad -(+3_{10})
 \end{array}$$

Αρνητικός αριθμός

$$\begin{array}{r}
 -3_{10} \quad 1101_2 \quad \rightarrow \quad 1101_2 \quad -3_{10} \\
 -(-4_{10}) \quad -1100_2 \quad \rightarrow \quad +0100_2 \quad +4_{10} \\
 \hline
 1 \quad 0001_2 \\
 \downarrow \\
 0001_2 \quad 1_{10}
 \end{array}$$

Απόρριψη Κρατουμένου

$$\begin{array}{r}
 -4_{10} \quad 1100_2 \quad \rightarrow \quad 1100_2 \quad -4_{10} \\
 -3_{10} \quad -0011_2 \quad \rightarrow \quad +1101_2 \quad +(-3_{10}) \\
 \hline
 1 \quad 1001_2 \\
 \downarrow \\
 1001_2 \quad -7_{10} \\
 \downarrow \\
 -0111_2 \quad -(+7_{10})
 \end{array}$$

Απόρριψη Κρατουμένου

Αρνητικός αριθμός



ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Παραδείγματα Αφαίρεσης Δυαδικών Αριθμών με χρήση Συμπληρώματος ως προς 2 (2/2)

$$\begin{array}{r}
 3_{10} \quad 0011_2 \\
 -4_{10} \quad -0100_2 \\
 \hline
 3_{10} \quad 0011_2 \\
 +(-4_{10}) \quad +1100_2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Αρνητικός αριθμός

$1111_2 \quad -1_{10}$
 \downarrow
 $-0001_2 \quad -(+1_{10})$

$$\begin{array}{r}
 5_{10} \quad 0101_2 \\
 -(-2_{10}) \quad -1110_2 \\
 \hline
 5_{10} \quad 0101_2 \\
 +2_{10} \quad +0010_2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$0111_2 \quad 7_{10}$

$$\begin{array}{r}
 -4_{10} \quad 1100_2 \\
 -5_{10} \quad -0101_2 \\
 \hline
 -4_{10} \quad 1100_2 \\
 +(-5_{10}) \quad +1011_2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Απόρριψη Κρατουμένου

$1 \ 0111_2$
 \downarrow
 $0111_2 \quad +7_{10}$

Υπερχειλίση!! Το -9_{10} δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με 4bits.

$$\begin{array}{r}
 5_{10} \quad 0101_2 \\
 -(-4_{10}) \quad -1100_2 \\
 \hline
 5_{10} \quad 0101_2 \\
 +4_{10} \quad +0100_2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Αρνητικός αριθμός

$1001_2 \quad -7_{10}$
 \downarrow
 $-0111_2 \quad -(+7_{10})$

Υπερχειλίση!! Το $+9_{10}$ δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με 4bits.

* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αφαίρεση Δυαδικών Αριθμών με Συμπληρώματα

- Είναι φανερό ότι η διαδικασία της αφαίρεσης των δυαδικών αριθμών με τη χρήση του συμπληρώματος ως προς 1 είναι πιο πολύπλοκη σε σχέση με την αντίστοιχη αφαίρεση που γίνεται με τη χρήση του συμπληρώματος ως προς 2.
- Ο υπολογισμός όμως του συμπληρώματος ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού είναι ευκολότερος σε σχέση με τον υπολογισμό του συμπληρώματος ως προς 1.
- Οι περισσότεροι Η/Υ εκτελούν την αφαίρεση των δυαδικών αριθμών με τη χρήση του συμπληρώματος ως προς 2.

* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΥΠΕΡΧΕΙΛΙΣΗ - OVERFLOW (1/4)

• Η υπερχείλιση είναι χαρακτηριστική ιδιότητα της αναπαράστασης αριθμών με σταθερό μήκος ψηφίων. Προσθέτοντας δύο αριθμούς n-ψηφίων είναι πιθανόν να προκύψει αποτέλεσμα n+1 ψηφίων.

• Π.χ. Σ' ένα καταχωρητή μήκους 8 bits ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να αναπαρασταθεί είναι ο 255_{10} . Το αποτέλεσμα όμως της πράξεως $250_{10} + 250_{10} = 500_{10}$ χρειάζεται 9 bits για να αναπαρασταθεί και δεν χωρά στον καταχωρητή των 8 bits.

1	1	1	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

+

1	1	1	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

=

1	1	1	1	1	0	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

• Τυπικώς αυτή είναι μια περίπτωση υπερχείλισης. Πρακτικά όμως δεν θεωρείται υπερχείλιση και ονομάζεται κρατούμενο (carry out) του καταχωρητή. (πρόσθεση με προσημασμένων (άρα θετικών) αριθμών)

* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΥΠΕΡΧΕΙΛΙΣΗ - OVERFLOW (2/4)

- Κατά την πρόσθεση αριθμών, που αναπαρίστανται με συμπληρώματα, το bit πρόσημου αποτελεί μέρος του μέτρου και το πιθανό κρατούμενο (carry out) του καταχωρητή δεν αποτελεί απαραίτητα υπερχείλιση.
- Από τεχνική άποψη υπερχείλιση μπορεί να έχουμε κατά την πρόσθεση προσημασμένων αριθμών, αν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δεν εμπίπτει στη κλίμακα τιμών που μας επιτρέπει η αναπαράσταση με τον συγκεκριμένο αριθμό bits.
- Υπερχείλιση μπορεί να συμβεί μόνο κατά την πρόσθεση αριθμών με το ίδιο πρόσημο. Δηλαδή όταν το αποτέλεσμα είναι πολύ μεγάλο ή πολύ μικρό (λαμβάνοντας υπ' όψη και το πρόσημο).

* ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΥΠΕΡΧΕΙΛΙΣΗ - OVERFLOW (3/4)

- Γνωρίζοντας τη συγκεκριμένου μήκους αναπαράσταση των προσημασμένων αριθμών, μπορεί να γίνει πρόβλεψη υπερχείλισης.
- Π.χ. Για προσημασμένους ως προς συμπλήρωμα 2 προσθετέους θα υπάρξει υπερχείλιση εάν αληθεύει είτε η μια ή η άλλη από τις παρακάτω συνθήκες:
 - α. Να **υπάρχει** carry-in στη στήλη του MSB (που είναι το bit προσήμου) αλλά να **μην υπάρχει** carry-out από αυτή τη στήλη.
 - β. Να **μην υπάρχει** carry-in στη στήλη του MSB (που είναι το bit προσήμου) αλλά να **υπάρχει** carry-out από αυτή τη στήλη.

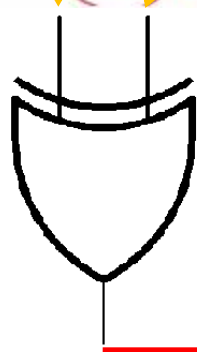
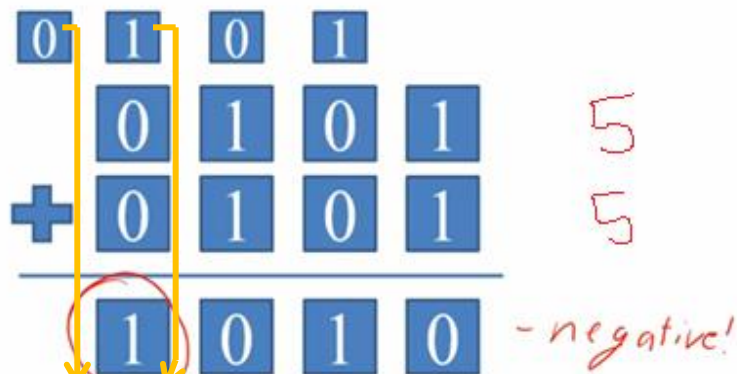


ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΥΠΕΡΧΕΙΛΙΣΗ - OVERFLOW (4/4)

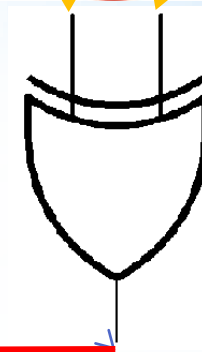
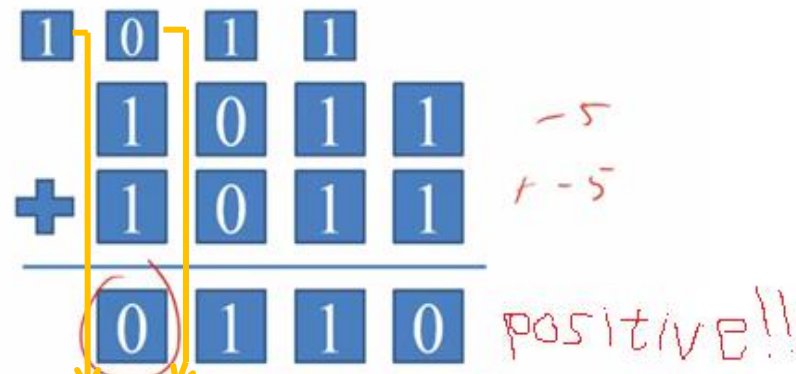
4-bit Two's Complement Representation Range:

-8 to +7



4-bit Two's Complement Representation Range:

-8 to +7



Overflow